Una Nota sobre la Maximización del Bienestar Social en Redes de Transporte

Louis de Grange C.
Escuela de Ingeniería Civil Industrial, Universidad Diego Portales, Santiago de Chile.
louis.degrange@udp.cl

Juan Carlos Muñoz A.
Depto. de Ingeniería de Transporte y Logística, Pontificia Universidad Católica de Chile.
jcm@ing.puc.cl

Rodrigo Troncoso O.
Facultad de Gobierno, Universidad del Desarrollo.
rtroncoso@udd.cl

RESUMEN

Usando una función de bienestar social del tipo Bergson-Samuelson mostramos que una asignación a costo marginal (basada en el segundo principio de Wardrop), pese a minimizar los costos totales del sistema, podría reducir el bienestar social respecto al equilibrio de mercado (asignación basada en el primer principio de Wardrop). Presentamos también un enfoque de asignación de tráfico basado en la maximización del bienestar social (definido a la Bergson-Samuelson). Cuando las funciones de utilidad de los viajeros son lineales, la asignación que maximiza el bienestar social es equivalente a la asignación a costos marginales que minimiza costo total del sistema, pero cuando los individuos presentan utilidades no lineales (tradicionalmente cóncavas debido a los axiomas de no saciedad y de rendimientos decrecientes), ambas diferentes. Mostramos que debido al efecto de la concavidad en las funciones de utilidad individuales, la asignación producto de maximizar el bienestar social debiera ser menos resistido por los usuarios que una asignación a mínimo costo total del sistema. Finalmente demostramos que cuando las funciones de costo de los arcos son lineales, y los costos a flujo libre entre las distintas rutas usadas son iguales, el equilibrio de mercado es simultáneamente el que obtiene los menores costos totales del sistema.

ABSTRACT

Using a Bergson-Samuelson welfare function it is demonstrated that a marginal cost traffic flow assignment following Wardrop's second principle, although it minimizes the total cost of a transport network, may reduce social welfare compared to the market equilibrium assignment based on Wardrop's first principle. A welfare-maximizing assignment model is presented and used to show that if the travellers' utility functions are linear, the assignment that maximizes social welfare will be the same as the assignment that minimizes total network cost, but if users' utility functions are non-linear (reflecting the traditional non-satiation and diminishing marginal utility axioms), the two assignments will be different. It is further shown that the effects of this non-linearity are such that a welfare-maximizing assignment will meet with less user resistance than a minimum total network cost assignment. Finally, it is demonstrated that when the cost functions of the network routes are linear and the free-flow (non-congestion) costs of the different routes are equal, the market equilibrium assignment will be the one with the lowest total network costs.

1. INTRODUCCIÓN

El segundo principio de Wardop (Wardrop, 1952) ha sido considerado, durante décadas, el paradigma que debiera regir el patrón de flujos vehiculares dentro de una red vial congestionada, si lo que se desea es obtener un uso eficiente del costo o tiempo total agregado empleado por todos los usuarios para realizar sus viajes. Este criterio consiste en asignar los vehículos de tal forma de que el costo total de la red sea el mínimo, y por lo tanto debiera ser preferible al equilibrio de mercado o de usuarios, también conocido como primer principio de Wardrop (Wardrop, 1952) en que cada usuario escoge su ruta en forma independiente de los demás minimizando su costo individual. La asignación basada en el segundo principio de Wardrop, también conocida como socialmente óptima, establece que los conductores cooperan unos con otros, en algunos casos sacrificando su propio beneficio a fin de reducir el costo o tiempo total de la red. Ambas asignaciones se establecen en función de los costos enfrentados por los usuarios en la red y no por el bienestar que ello les causa.

Bell and Iida (1997) muestran que si cada viajero maximiza unilateralmente su función de utilidad al momento de seleccionar una ruta sobre la red, en forma independiente de los demás viajeros, se obtendrá el equilibrio de Mercado basado en el primer principio de Wardrop. Es decir, la minimización de costos individuales de los viajeros genera el mismo equilibrio de mercado que la maximización de la utilidad individual. Sin embargo, esta equivalencia no necesariamente se cumple a nivel de una planificación centralizada que busque minimizar los costos totales del sistema respecto a una planificación centralizada que busque maximizar el bienestar social a nivel agregado. Este último punto representa la hipótesis central de nuestro trabajo: es posible que una asignación a costo marginal reduzca el nivel de bienestar social respecto a un equilibrio de mercado.

En efecto, en este trabajo mostramos que, cuando los viajeros presentan funciones de utilidad tradicionales (crecientes pero con utilidad marginal decreciente, y en general funciones de utilidad no lineal), una asignación de tráfico basada en el segundo principio de Wardrop podría generar una reducción en la función de bienestar social, a pesar de que los costos totales del sistema sean menores. Esto se explica básicamente porque moverse de un equilibrio de mercado a una asignación de mínimo costo total implica una reasignación de recursos que favorece a determinados viajeros pero perjudica a otros. Si consideramos el bienestar social como la suma de las utilidades de los individuos (Bergson, 1938; Samuelson, 1956; Boadway and Bruce, 1984), la no linealidad presente en las utilidades individuales producto de los axiomas de no saciedad y de rendimientos decrecientes en el consumo, podría implicar que la pérdida de bienestar de los usuarios perjudicados fuese mayor que el aumento de bienestar de los usuarios favorecidos. Es decir, pese a que el tiempo total exigido para los viajes debiera ser menor bajo el segundo principio de Wardrop, el bienestar del conjunto de viajeros de la red podría verse reducido.

De acuerdo a Easa (1991), la asignación de tráfico is "the process of allocating a set of present or future trip interchanges, known as origin-destination (OD) demands, to a specified transportation network". Los resultados de una asignación de tráfico contribuyen a la decisión de muchos procesos de planificación y diseño de sistemas de transporte, como la evaluación de escenarios para diferentes proyectos de infraestructura, análisis del impacto ambiental, diseño y tarificación de autopistas. Luego, el criterio de asignación a considerar puede repercutir en las decisiones que tomen las autoridades y planificadores del transporte, que finalmente incidirán en el nivel de bienestar de los viajeros del sistema, que debiera finalmente representar el objetivo del planificador central.

De hecho, por la simplicidad que significa, el desarrollo de muchas metodologías para el estudio de mecanismos de tarificación vial (Arnott and Small, 1994; Button and Verhoef, 1998; Yang y Meng, 2002; Verhoef, 2002; Shepherd and Sumalee , 2004; Santos, 2004; Yanga et al, 2010), diseño de redes de transporte y problemas de optimización bi-nivel (Marcotte, 1983; Newbery, 1989; Yang y Bell, 1998; Brotcorne et al, 2001; Mun et al, 2003; Koh et al, 2009), regulación de mercados de transporte (Smith,1979; Small, 1992; Small and Gómez-Ibáñez, 1998; Parry, 2002), entre otros, han considerado acercarse a una asignación basada en el segundo principio de Wardrop como objetivo principal.

En la sección 2 presentamos un modelo simple para una red pequeña que permite entender gráficamente la pérdida de bienestar social que puede generarse al movernos de un equilibrio de mercado a una asignación a costo marginal o de mínimo costo total. En la sección 3 presentamos un problema de optimización equivalente de asignación de tráfico que se basa en maximizar el bienestar social a la Bergson-Samuelson en lugar de minimizar el costo total; analizamos sus condiciones de optimalidad y las comparamos con las del segundo principio de Wardrop. Finalmente, en la sección 4 se presenta un resumen y conclusiones del trabajo realizado.

2. FORMULACIÓN DEL MODELO PARA UNA RED SIMPLE

2.1 Descripción de la Red y Equilibrio

Consideremos un ejemplo simple con viajeros homogéneos (e.g. todos los viajeros son idénticos), con funciones de costo lineales, y que se asignan en una red en la que existe sólo un par origen-destino con sólo dos rutas alternativas:

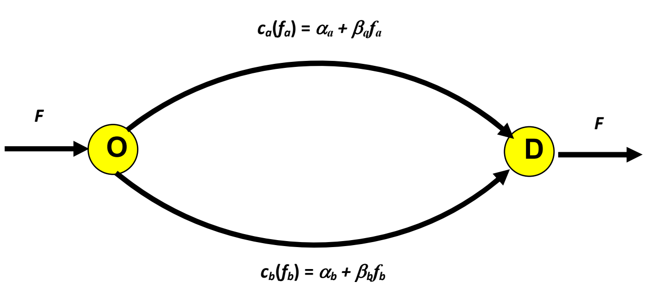

FIGURA 1: Ejemplo Simple de Red Vial

De la Figura 1 observamos que el flujo total de viajeros entre el origen (O) y el destino (D) es F, donde $f_a + f_b = F$. Los costos medios sobre cada arco son lineales respecto al flujo propio. Los parámetros α_a y α_b representan los costos a flujo libre de cada arco y los parámetros β_a y β_b representan el efecto marginal del flujo sobre el costo del arco.

El equilibrio basado en el primer principio de Wardrop (o equilibrio de mercado) para la red expuesta en la Figura 1 se obtiene igualando los costos medios y agregando la restricción de conservación de flujos (Beckmann et al, 1956):

$$c_a(f_a) = c_b(f_b) \rightarrow \alpha_a + \beta_a f_a = \alpha_b + \beta_b f_b \quad (1)$$

$$f_a + f_b = F \quad (2)$$

Suponiendo que en el equilibrio ambas rutas llevarán flujo (excluyendo una solución de borde), la solución del problema (1) y (2) es:

$$f_a^* = \frac{(\alpha_b - \alpha_a) + \beta_b F}{\beta_a + \beta_b}, \quad f_b^* = F - f_a^* \quad (3)$$

Por otra parte, una asignación basada en el segundo principio de Wardrop, que considera la minimización de los costos totales sobre la red, se obtiene igualando los costos marginales, además de la restricción de conservación de flujos:

$$\frac{\partial(c_a(f_a) \cdot f_a)}{\partial f_a} = \frac{\partial(c_b(f_b) \cdot f_b)}{\partial f_b} \rightarrow \alpha_a + 2\beta_a f_a = \alpha_b + 2\beta_b f_b \quad (4)$$

$$f_a + f_b = F \quad (5)$$

Considerando flujos positivos, la solución del problema (4) y (5) es:

$$f_a^{**} = \frac{(\alpha_b - \alpha_a) + 2\beta_b F}{2(\beta_a + \beta_b)}, \quad f_b^{**} = F - f_a^{**} \quad (6)$$

La solución (6) se caracteriza porque genera costos totales inferiores a los costos generados por la solución (3). A la solución (6) se le denomina asignación óptima del sistema (SOA).

2.2 Función de Utilidad de los Viajeros y Función de Bienestar Social

Consideremos que cada viajero i del sistema tiene una función de utilidad $U(g_i)$, donde g_i es la cantidad que se consume de un bien. Las funciones de utilidad son crecientes (axioma de no saciedad) a tasa decreciente en el consumo del bien (axioma de rendimientos decrecientes), es decir: $\frac{\partial U}{\partial g_i} > 0$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial g_i^2} < 0$ lo que representa que el bien es deseable, pero está sujeto al efecto de saturación.

Para el estudio de las asignaciones de flujos vamos a considerar como único bien el tiempo disponible. Definimos $g_i = t_i - c_i$, donde t_i es el tiempo total disponible del individuo i (por ejemplo, 24 horas al día), y c_i es el tiempo de transporte del individuo i. Luego, g_i representa el tiempo libre que dispone el individuo.

En el ejemplo de la Figura 1 se presenta el bienestar social que se genera para el total de los individuos en función del tiempo libre $g_a = t - c_a$, y $g_b = t - c_b$, con que cuentan quienes usan el arco a y b respectivamente a través de curvas iso-bienestar (Samuelson, 1956).

El modelo supone que los individuos son homogéneos: la utilidad de los viajeros del arco *a* será $U_a = U(g_a)$ y la de los viajeros del arco *b* será $U_b = U(g_b)$.

Es interesante notar que si cada viajero maximizara unilateralmente su función de utilidad al momento de seleccionar una ruta sobre la red, en forma independiente de los demás viajeros, se obtendría el equilibrio de mercado basado en el primer principio de Wardrop (Bell and Iida, 1997). Es decir, la minimización de costos individuales de los viajeros genera el mismo equilibrio de Mercado que la maximización de la utilidad individual.

Sin embargo, esta equivalencia a nivel individual no necesariamente se traspasa a nivel de planificación central. Es decir, la minimización de costos totales del sistema puede llevar a resultados diferentes respecto a una maximización del bienestar social basado en las utilidades de los individuos.

Para analizar este último punto, consideremos una función de bienestar social como las descritas en Bergson (1938), Samuelson (1956) y Boadway y Bruce (1984):

$$W(U_1, U_2, ..., U_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i \tag{7}$$

en que W corresponde al bienestar social, U_i es la utilidad del individuo i, y λ_i es la importancia relativa de cada individuo.

Asumiendo que todos los individuos son igualmente importantes $(\lambda(i) = 1, \forall i)$, y considerando el ejemplo de la Figura 1, podemos definir la siguiente función de bienestar social:

$$W = \sum_m f_m U_m = f_a \cdot U(g_a) + f_b \cdot U(g_b) = f_a \cdot U_a + f_b \cdot U_b \tag{8}$$

A partir de (8) podemos graficar una curva de iso-bienestar social sobre los ejes conformados por las variables g_a y g_b. Dado que los flujos f_a y f_b dependen de los costos c_a y c_b respectivamente, y que $g_i = t - c_i$, los flujos f_a y f_b se pueden expresar en función de g_a y g_b respectivamente. Específicamente, tenemos que $f_a = \frac{t - g_a - \alpha_a}{\beta_a}$ y $f_b = \frac{t - g_b - \alpha_b}{\beta_b}$.

Luego, (8) la podemos escribir como:

$$W = \left(\frac{t - g_a - \alpha_a}{\beta_a}\right) U_a + \left(\frac{t - g_b - \alpha_b}{\beta_b}\right) U_b \tag{9}$$

La curva de iso-bienestar social (para un determinado valor de W) que se obtiene de (8) satisface la siguiente condición:

$$dW = \left(\frac{\partial f_a}{\partial g_a} U_a + \frac{\partial U_a}{\partial g_a} f_a\right) dg_a + \left(\frac{\partial f_b}{\partial g_b} U_b + \frac{\partial U_b}{\partial g_b} f_b\right) dg_b = 0 \tag{10}$$

2.3 Estática Comparativa de Equilibrios

Para un equilibrio de mercado (primer principio de Wardrop), se tendrá que $c_a = c_b$ y por lo tanto

$$\frac{g_a}{g_b} = 1 \tag{11}$$

Por otra parte, el conjunto de soluciones factibles para los flujos queda determinado por $f_a + f_b = F$. Considerando que $f_a = \frac{t - g_a - \alpha_a}{\beta_a}$ y $f_b = \frac{t - g_b - \alpha_b}{\beta_b}$, el conjunto de soluciones factibles en términos de g_a y g_b queda representado por la siguiente ecuación:

$$g_a = \underbrace{t\left(\frac{\beta_a + \beta_b}{\beta_b}\right) - F\beta_a - \alpha_a - \alpha_b\left(\frac{\beta_a}{\beta_b}\right)}_{K} - g_b\left(\frac{\beta_a}{\beta_b}\right) \tag{12}$$

$$g_a = K - g_b\left(\frac{\beta_a}{\beta_b}\right), \text{ es decir se debe cumplir } \frac{dg_a}{dg_b} = -\frac{\beta_a}{\beta_b} \tag{13}$$

Luego, la intersección de las rectas definidas por (11) y por (13) da como resultado el equilibrio de mercado (primer principio de Wardrop). En la Figura 2 se grafica este equilibrio

(punto *A*) y se muestra la curva de iso-bienestar social correspondiente, W^A.

Por otra parte, para una asignación óptima que minimiza los costos totales del sistema (segundo principio de Wardrop), se tendrá que $\frac{\partial(c_a(f_a) \cdot f_a)}{\partial f_a} = \frac{\partial(c_b(f_b) \cdot f_b)}{\partial f_b}$.

En este caso, y producto de igualar los costos marginales de ambas rutas ya definidos en la expresión (4) se obtiene la siguiente relación expresada en términos de los tiempos disponibles para el usuario:

$$g_a = \left(\frac{\alpha_b - \alpha_a}{2}\right) + g_b \tag{14}$$

Luego, la intersección de las rectas definidas por (14) y por (13) da como resultado la asignación óptimo social del sistema (segundo principio de Wardrop).

Es interesante notar que esta última recta $g_a = \left(\frac{\alpha_b - \alpha_a}{2}\right) + g_b$ es un desplazamiento paralelo de la recta definida por la ecuación (11). Suponiendo que $\alpha_a > \alpha_b$, la recta $g_a = \left(\frac{\alpha_b - \alpha_a}{2}\right) + g_b$ está desplazada hacia la derecha respecto a la recta $\frac{g_a}{g_b} = 1$; si en cambio $\alpha_a < \alpha_b$, la recta estará desplazada hacia la izquierda. Por otra parte, si $\alpha_a = \alpha_b$, se tendrá que el equilibrio de Mercado coincidirá con la asignación de óptimo social del sistema.

Suponiendo que $\alpha_a > \alpha_b$, consideremos primero un desplazamiento pequeño de la recta $g_a = \left(\frac{\alpha_b - \alpha_a}{2}\right) + g_b$, es decir, que α_a es sólo un poco mayor que α_b. Esto genera la asignación del punto *B* que se grafica en la Figura 2:

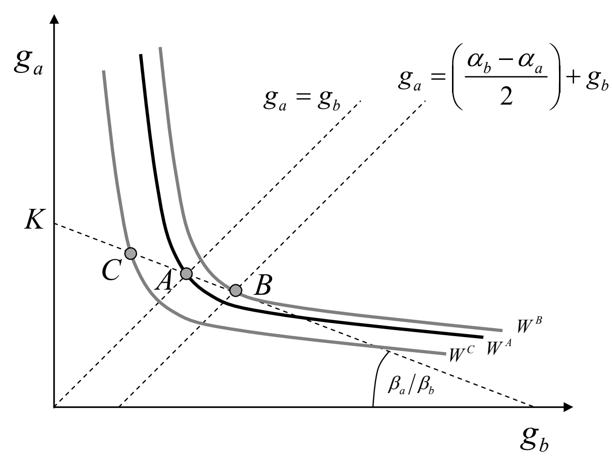

FIGURA 2: Bienestar Social y Asignación a Costos Marginales (segundo principio de Wardrop)

Por lo tanto, se observa en este caso que una asignación a costo mínimo (punto *B*) genera un aumento en la función de bienestar de los viajeros ($W^B > W^A$). Sin embargo, si $\alpha_a < \alpha_b$, una asignación a costo mínimo (punto *C*) genera una reducción en la función de bienestar de los viajeros ($W^C > W^A$).

Incluso manteniendo el supuesto de que $\alpha_a > \alpha_b$, si α_a es mucho mayor que α_b, obtendríamos la asignación a costo mínimo del punto *D* que se grafica en la Figura 3 en que nuevamente una asignación a costo mínimo del sistema genera una reducción en la función de bienestar de los viajeros ($W^D < W^A$).

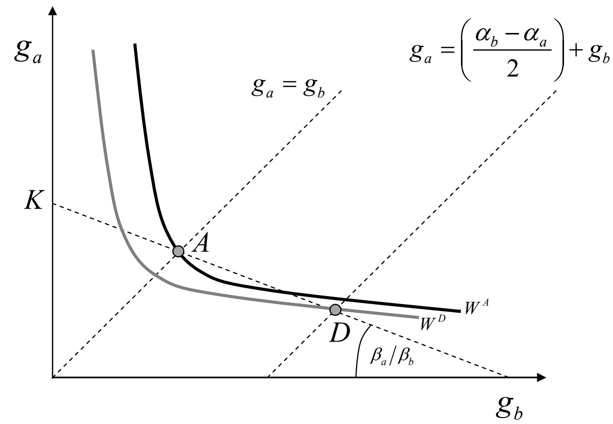

FIGURA 3: Bienestar Social y Asignación a Costos Marginales (segundo principio de Wardrop)

2.4 Asignación que Maximiza el Bienestar Social

De acuerdo a la expresión (10):

$$\frac{dg_a}{dg_b} = -\frac{\left(\frac{\partial f_b}{\partial g_b}U_b + \frac{\partial U_b}{\partial g_b}f_b\right)}{\left(\frac{\partial f_a}{\partial g_a}U_a + \frac{\partial U_a}{\partial g_a}f_a\right)} \tag{15}$$

Por otra parte, se debe satisfacer la condición (13) por lo que la condición de optimalidad para obtener flujos que maximicen el bienestar social es:

$$\frac{\beta_a}{\beta_b} = \frac{\left(\frac{\partial f_b}{\partial g_b}U_b + \frac{\partial U_b}{\partial g_b}f_b\right)}{\left(\frac{\partial f_a}{\partial g_a}U_a + \frac{\partial U_a}{\partial g_a}f_a\right)} \tag{16}$$

A partir de las ecuaciones (16) y (13) es posible obtener las soluciones g_a^* y g_b^* que maximizan la función de bienestar social (notar que a partir de g_a^* y g_b^* podemos obtener directamente los flujos correspondientes f_a^* y f_b^* que maximizan el bienestar social). Esta última solución se representa en el punto *E* de la figura 4:

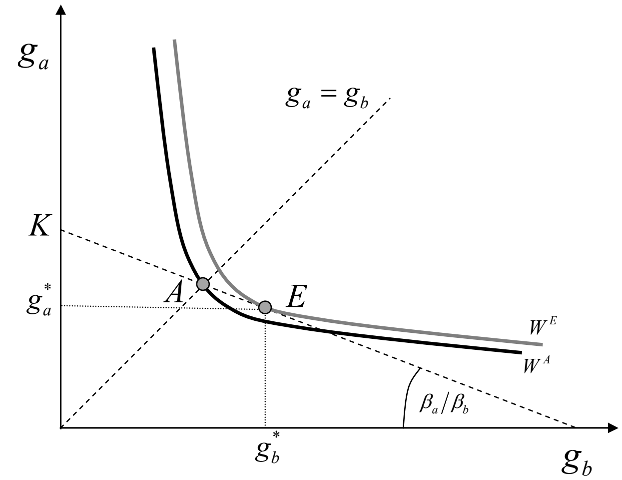

FIGURA 4: Asignación que Maximiza el Bienestar Social

Es importante notar que el punto *E* es diferente al punto *B* de la Figura 2.

Para que en este ejemplo un equilibrio de mercado sea equivalente a una asignación que maximiza el bienestar social (es decir, para que el punto *E* de la Figura 4 coincida con el punto *A*), tendría que cumplirse simultáneamente la condición de optimalidad (16) y que $g_a = g_b$. En el Anexo A se presenta un ejemplo numérico para la red de la Figura 1, en el que se compara la asignación que minimiza el tiempo total con la que maximiza el bienestar total.

Por otra parte, si los individuos presentaran funciones de utilidad lineales, como por ejemplo de la forma $U_i = \eta + \rho g_i$ ($\rho >$ 0), de la condición de optimalidad (16) se obtendría:

$$\frac{\beta_a}{\beta_b} = \frac{\left(\frac{-1}{\beta_b}(\eta + \rho g_b) + \rho\left(\frac{t - g_b - \alpha_b}{\beta_b}\right)\right)}{\left(\frac{-1}{\beta_a}(\eta + \rho g_a) + \rho\left(\frac{t - g_a - \alpha_a}{\beta_a}\right)\right)} = \frac{\beta_a}{\beta_b}\frac{\left(\rho(t - g_b - \alpha_b) - (\eta + \rho g_b)\right)}{\left(\rho(t - g_a - \alpha_a) - (\eta + \rho g_a)\right)} \tag{17}$$

$$\rho(t - g_b - \alpha_b) - (\eta + \rho g_b) = \rho(t - g_a - \alpha_a) - (\eta + \rho g_a) \tag{18}$$

$$g_a = \left(\frac{\alpha_b - \alpha_a}{2}\right) + g_b \tag{19}$$

La expresión (19) es igual a (14), la cual representa la asignación a costos marginales que minimiza el costo total del sistema. Por lo tanto, cuando los individuos presentan una función de utilidad lineal, la asignación que minimiza el costo total del sistema es equivalente a la asignación que maximiza la función de bienestar de los individuos.

3. ASIGNACIÓN BASADA EN LA MAXIMIZACIÓN DEL BIENESTAR SOCIAL

3.1 Problema de Minimización del Costo Total

La formulación de los problemas de asignación basada en la minimización del costo total y en la maximización de la función de bienestar social presentados en esta sección serán consistentes con la nomenclatura planteada en Nagurney (2000). El problema de optimización que entrega el mínimo costo del sistema, y suponiendo que el costo de un arco c_a es función sólo del flujo en el propio arco (f_a) y que además ese costo es positivo y creciente con el flujo, está dado por:

$$\min_{\{h_p^w\}} \quad C = \sum_{a \in A} c_a\left(f_a\right) f_a \tag{20}$$

s.a.:

$$\sum_{p \in P_w} h_p^w = T_w \left(\mu_w\right) \; \forall w \in W \tag{21}$$

$$f_a = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} \delta_{ap} h_p^w \quad \forall a \in A \tag{22}$$

$$h_p^w \geq 0 \quad \forall p \in P_w, \; \forall w \in W \tag{23}$$

c_a: costo en el arco a.
f_a: flujo en el arco a.
δ_{ap}: parámetro que toma el valor 1 si el arco a pertenece a la ruta p , y cero si no.
h_p^w: flujo en la ruta p entre el par w.
T_w: número de viajes (demanda fija) entre el par origen-destino w.
P_w: conjunto de rutas entre el par origen-destino w.
W: conjunto de pares origen-destino del sistema.
A: conjunto de arcos de la red vial.

El costo total de la ruta p se define como $C_p = \sum_{a \in A} c_a\left(f_a\right)\delta_{ap}$ Luego, es posible escribir la función objetivo del problema (20) en función de los costos en las rutas (Nagurney, 2000):

$$\min_{\{h_p^w\}} \quad C = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} C_p h_p^w = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} \hat{C}_p^w \tag{24}$$

La condición de optimalidad de primer orden de este problema (24) es la siguiente:

$$\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} \begin{cases} = \mu_w, \; \forall h_p^w > 0 \\ \geq \mu_w, \; \forall h_p^w = 0 \end{cases} \tag{25}$$

donde $\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = \frac{\partial C_p}{\partial h_p^w} h_p^w + C_p$ denota el costo marginal de una unidad adicional de flujo en la ruta p entre el par w. En la ecuación (25), el parámetro μ_w corresponde al multiplicador de Lagrange asociado a cada restricción (21) y representa el aumento del costo total del sistema C si la demanda en el par w aumentara en una unidad, por lo que se debe cumplir que $\mu_w = \frac{\partial C}{\partial T_w} > 0$.

El lado izquierdo de la condición de optimalidad (25) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = \frac{\partial C_p}{\partial h_p^w} h_p^w + C_p = \frac{\partial}{\partial h_p^w}\left(\sum_{a \in A} c_a \delta_{ap}\right) h_p^w + C_p = \left(\sum_{a \in A} \frac{\partial c_a}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial h_p^w} \delta_{ap}\right) h_p^w + C_p \tag{26}$$

$$\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = \left(\sum_{a \in A} \frac{\partial c_a}{\partial f_a} \delta_{ap}\right) h_p^w + C_p \tag{27}$$

La expresión $\left(\sum_{a \in A} \frac{\partial c_a}{\partial f_a} \delta_{ap}\right) h_p^w$ representa la externalidad en términos de costos que se produce en la ruta p al aumentar el flujo de dicha ruta. Por lo tanto, la asignación definida por (25) y (27) iguala la suma de los costos y sus externalidades asociadas para todas las rutas usadas en cada par.

3.2 Problema de Maximización del Bienestar Social

Por otra parte, el problema de optimización que entrega el mayor bienestar social de acuerdo al criterio de función de bienestar definido por Bergson (1938), Samuelson (1956), y Boadway y Bruce (1984), se puede escribir de la siguiente forma:

$$\max_{\{h_p^w\}} \quad W = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} U_p h_p^w = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} \hat{U}_p^w \tag{28}$$

donde U_p es la utilidad percibida por los usuarios de la ruta p entre el par w, y $\hat{U}_p^w = U_p h_p^w$ es la utilidad o bienestar total de los viajeros de la ruta p entre el par w. Considerando usuarios homogéneos, la función de utilidad se puede escribir como $U_p = U\left(g_p\right)$.

La condición de optimalidad del problema (28) es la siguiente:

$$\frac{\partial \hat{U}_p^w}{\partial h_p^w} \begin{cases} = \gamma_w, \forall h_p^w > 0 \\ \leq \gamma_w, \forall h_p^w = 0 \end{cases} \tag{29}$$

donde $\frac{\partial \hat{U}_p^w}{\partial h_p^w} = \frac{\partial U_p}{\partial h_p^w} h_p^w + U_p$ denota la utilidad marginal de la utilidad o bienestar total de los viajeros de la ruta p entre el par w. En la ecuación (29), el parámetro γ_w representa la reducción del bienestar total del sistema W si la demanda en el par w aumenta en una unidad; el signo de γ_w dependerá del nivel de congestión de las rutas.

Las condiciones de optimalidad (29) y (25) en general producirán asignaciones diferentes de los flujos sobre las rutas (ver ejemplo de la sección 2).

Considerando que $\hat{U}_p^w = U_p h_p^w$, de (29) obtenemos:

$$\frac{\partial U_p}{\partial h_p^w} h_p^w + U_p \begin{cases} = \gamma_w, \forall h_p^w > 0 \\ \leq \gamma_w, \forall h_p^w = 0 \end{cases} \tag{30}$$

Aplicando la regla de la cadena sobre (30) llegamos a:

$$\frac{\partial U_p}{\partial C_p} \frac{\partial C_p}{\partial h_p^w} h_p^w + U_p \begin{cases} = \gamma_w, \forall h_p^w > 0 \\ \leq \gamma_w, \forall h_p^w = 0 \end{cases} \tag{31}$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial C_p} \frac{\partial \sum_a \left(\delta_{ap} c_a\right)}{\partial h_p^w} h_p^w = \frac{\partial U_p}{\partial C_p}\left(\sum_{a \in A} \delta_{ap} \frac{\partial c_a}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial h_p^w}\right) h_p^w = \frac{\partial U_p}{\partial C_p}\left[\sum_{a \in A}\left(\delta_{ap} \frac{\partial c_a}{\partial f_a}\right)\right] h_p^w \tag{32}$$

La expresión $\frac{\partial C_p}{\partial h_p^w} h_p^w = \left[\sum_{a \in A}\left(\delta_{ap} \frac{\partial c_a}{\partial f_a}\right)\right] h_p^w$ es la misma que aparece en (27). La expresión $\frac{\partial U_p}{\partial C_p} = -\frac{\partial U_p}{\partial g_p}$ es el negativo de la utilidad marginal del ingreso. La presencia del término $\frac{\partial U_p}{\partial C_p}$ en la ecuación (31) equivale a incorporar una ponderación a la externalidad $\frac{\partial C_p}{\partial h_p^w} h_p^w$.

La interpretación económica de la expresión (30)-(31) es diferente a la de la expresión (25)-(27). Mientras en (25)-(27) la condición de optimalidad incluye las externalidades de los arcos de las rutas utilizadas (independiente del costo a flujo libre), en

(30)-(31) las externalidades son ponderadas por la utilidad marginal del ingreso. Dado que hemos supuesto funciones de utilidad tradicionales sujetas a los axiomas de no saciedad y rendimientos decrecientes, esto es $\frac{\partial U_p}{\partial g_p} > 0$ y $\frac{\partial^2 U_p}{\partial g_p^2} < 0$, se tendrá que las rutas que tengan mayor costo individual en la asignación óptima de sistema quedarán multiplicadas por una utilidad marginal del tiempo disponible mayor en (36) que aquéllas rutas en que el tiempo individual demandado sea menor.

Así, es esperable que la asignación de máximo bienestar reduzca el flujo por las primeras rutas (de mayor costo individual) y aumente el flujo por las últimas (de menor costo individual). En ese sentido, es posible argumentar que la nueva asignación basada en maximizar el bienestar social a la Bergson-Samuelson será menos resistida por los usuarios que la asignación óptima de sistema basada en el segundo principio de Wardrop.

4. ALGUNAS PROPIEDADES PARA LAS UNCIONES DE COSTO LINEAL

4.1 Red Simple con Costos Lineales

Para el ejemplo de la sección 2, la condición (25) resultaría de la siguiente forma:

$$\frac{\partial c_a}{\partial f_a} f_a + c_a = \frac{\partial c_b}{\partial f_b} f_b + c_b \tag{33}$$

Dado que $\frac{\partial c_a}{\partial f_a} = \beta_a$ y $\frac{\partial c_b}{\partial f_b} = \beta_b$, además de que $f_a = \frac{c_a - \alpha_a}{\beta_a}$ y $f_b = \frac{c_b - \alpha_b}{\beta_b}$, si reemplazamos en (33) obtenemos:

$$\beta_a \left(\frac{2c_a - \alpha_a}{\beta_a} \right) = \beta_b \left(\frac{2c_b - \alpha_b}{\beta_b} \right) \rightarrow 2(c_a - c_b) = (\alpha_a - \alpha_b) \tag{34}$$

Como bajo el equilibrio de mercado $c_a = c_b$, se deberá cumplir que $\alpha_a = \alpha_b$. Por lo tanto, si los costos fijos entre las rutas alternativas son iguales, el equilibrio de mercado llevará a una asignación que minimiza el tiempo total de la red.

4.2 Red General con Costos Lineales

Es posible generalizar el resultado de la sección 4.1 para redes con costos lineales y tiempos a flujo libre de las rutas usadas iguales. Esto se obtiene fácilmente a partir de la condición de optimalidad (25), que establece que:

$$\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = \frac{\partial \hat{C}_q^w}{\partial h_q^w}, \quad \forall (p,q) \in P_w, h_p^w > 0, h_q^w > 0 \tag{35}$$

Considerando que $\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = \sum_{a \in A} \frac{\partial (c_a \cdot f_a)}{\partial f_a} \delta_{ap}$ se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = \sum_{a \in A} \left(c_a + \frac{\partial c_a}{\partial f_a} f_a \right) \delta_{ap} = \sum_{a \in A} (c_a \delta_{ap}) + \sum_{a \in A} \left(\frac{\partial c_a}{\partial f_a} f_a \delta_{ap} \right) \tag{36}$$

Dado que $\frac{\partial c_a}{\partial f_a} = \beta_a$ y que $f_a = \frac{c_a - \alpha_a}{\beta_a}$, la ecuación (36) se reduce a:

$$\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = \sum_{a \in A} (c_a \delta_{ap}) + \sum_{a \in A} \left(\beta_a \left(\frac{c_a - \alpha_a}{\beta_a} \right) \delta_{ap} \right) \tag{37}$$

$$\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = 2C_p - \sum_{a \in A} (\alpha_a \delta_{ap}) \tag{38}$$

Imponiendo la condición (35) resulta:

$$\frac{\partial \hat{C}_p^w}{\partial h_p^w} = \frac{\partial \hat{C}_q^w}{\partial h_q^w} \rightarrow 2C_p - \sum_a (\alpha_a \delta_{ap}) = 2C_q - \sum_a (\alpha_a \delta_{aq}) \tag{39}$$

Luego, si los costos a flujo libre de las rutas usadas entre el par w son los mismos $\left(\sum_{a \in A} (\alpha_a \delta_{ap}) = \sum_{a \in A} (\alpha_a \delta_{aq}) \right)$, de (39) se obtiene que:

$$C_p^w = C_q^w, \quad \forall (p,q) \in P_w, h_p^w > 0, h_q^w > 0 \tag{40}$$

Por lo tanto, considerando funciones de costo lineales en los arcos, se demuestra que la asignación generada por el equilibrio de mercado (primer principio de Wardop) es consistente con una asignación a costos marginales que minimice el costo total del sistema (Segundo principio de Wardrop), siempre que los costos a flujo libre de las rutas usadas sean los mismos.

Finalmente, podemos indicar también que las condiciones de optimalidad (29) y (25) serán equivalentes, independiente del tipo de función de costos sobre los arcos, si los viajeros presentan funciones de utilidad lineales. De hecho, si $U_p = \eta + \rho g_p$ ($\rho > 0$) es fácil demostrar que, si todos los individuos son iguales y tienen el mismo tiempo total disponible, se cumplirá que:

$$\sum_w \sum_p U_p h_p^w = \sum_w \sum_p (\eta + \rho g_p) h_p^w = \eta \sum_w \sum_p h_p^w + \rho \sum_w \sum_p g_p h_p^w \tag{41}$$

$$\sum_w \sum_p U_p h_p^w = \eta \sum_w T_w + \rho \sum_w \sum_p (T - C_p) h_p^w \tag{42}$$

$$\sum_w \sum_p U_p h_p^w = (\eta + \rho T) \sum_w T_w - \rho \sum_w \sum_p C_p h_p^w \tag{43}$$

Dado que $(\eta + \rho T) \sum_w T_w$ es constante y $\rho > 0$, se tendrá que $\max \sum_w \sum_p U_p h_p^w = \min \sum_w \sum_p C_p h_p^w$.

5. CONCLUSIONES

Muchos procesos de planificación de sistemas de transporte urbano han desarrollado metodologías cuyo objetivo es optimizar el uso de recursos, basándose para ello en criterios como el que establece el segundo principio de Wardrop, el cual consiste en asignar flujos o diseñar redes de transporte de tal forma que se minimice el costo total de los viajeros sobre la red. Sin embargo, los resultados pueden diferir si en lugar de minimizar el costo total del sistema el objetivo fuese maximizar una función de bienestar social definida como la suma de las utilidades de los viajeros.

En este trabajo demostramos que, para una función de bienestar definida a partir de la suma de las utilidades de los viajeros (bienestar a la Bergson-Samuelson), incluso un equilibrio de mercado basado en el primer principio de Wardrop podría generar un nivel de bienestar social superior al que se obtendría bajo un criterio de asignación basado en el segundo principio de Wardrop. Es decir, minimizar los costos totales de la red podría llevar a una reducción en el bienestar social.

La minimización de los costos totales de los individuos en el segundo principio de Wardrop conlleva que ciertos individuos son asignados a rutas con un alto costo individual (comparado a las rutas alternativas para el mismo viaje) debido al bajo costo marginal que significan para el sistema. Debido a la utilidad marginal decreciente, estos individuos enfrentan un impacto en su bienestar mayor por unidad de tiempo que aquellos usuarios que son asignados a rutas con tiempos de viaje menores. Dado que la utilidad marginal es parte activa de la asignación a máximo bienestar, ésta asignación reducirá la diferencia de costo (y de bienestar) entre los usuarios perjudicados y beneficiados. Así, una asignación que maximiza el bienestar a la Bergson-Samuelson debiese ser menos resistida por los usuarios que una asignación que minimiza los costos totales del sistema según el segundo principio de Wardrop.

Sin embargo, si los individuos presentan funciones de utilidad lineales, la asignación basada en el segundo principio de Wardrop (minimización de costos totales) coincide con el equilibrio que maximiza la función de bienestar social, independiente del tipo de función de costo sobre los arcos.

Finalmente, demostramos que si en los arcos de una red existen funciones de costo lineales que dependen del flujo propio, y si las rutas alternativas presentan el mismo costo a flujo libre, el equilibrio de mercado coincide con la asignación que minimiza el costo total del sistema. Por lo tanto, en estos casos el mercado alcanzaría una asignación óptima de recursos pese a la existencia de congestión.

REFERENCIAS

Arnott, R. and Small, K. (1994). The economics of traffic congestion. American Scientist, 82, 446 - 455.

Beckmann, M., McGuire, C. B. and C. B. Winsten. (1956). Studies in the Economics of Transportation. Yale University Press, New Haven, CT.

Bell, M.G.H. and Iida, Y. (1997). Transportation Network Analysis. John Wiley, Chichester, UK.

Bergson, A. (1938). A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics', Quarterly Journal of Economics, 52, (2), 310-334.

Boadway, R. and N.Bruce. (1984). Welfare Economics Basil Blackwell, Cambridge.

Brotcorne, L.; Labbé, M.; Marcotte, P. and Savard, G. (2001). A Bilevel model for toll optimization on a multicommodity transportation network. Transportation Science, 35, 345-358.

Button K.J. and Verhoef E.T. (eds.) (1998) Road Pricing, Traffic Congestion and the Environment: Issues of Efficiency and Social Feasibility Edward Elgar, Cheltenham.

Easa, S. M. (1991). Traffic assignment in practice: overview and guidelines for users. Journal of Transportation Engineering, 117, 602-622.

Koh, A.; Shepherd, S. and Sumalee, A. (2009). Second best toll and capacity optimisation in networks: solution algorithm and policy implications. Transportation, 36, 147-165.

Marcotte, P. (1983). Network Optimization with Continuous Control Parameters. Transportation Science, 17, 181-197.

Mun, S., Konishi, K. and Yoshikawa. K. (2003. Optimal Cordon Pricing. Journal of Urban Economics, 54, 21–38.

Nagurney, A. (2000). Sustainable Transportation Networks, Edward Elgar Publishing, Cheltenham, England.

Newbery, D. M., (1989). Cost recovery from optimally designed roads. Economica, 56, 165-85.

Parry, I. W. H. (2002). Comparing the Efficiency of Alternative Policies for Reducing Traffic Congestion. Journal of Public Economics, 85,333–362.

Samuelson, P. (1956). Social Indifference Curves. The Quarterly Journal of Economics, 70, 1-22.

Santos, G. (2004). 2004b. Urban Congestion Charging: A Second-Best Alternative. Journal of Transport Economics and Policy, 38,345–369.

Shepherd, S. P., and Sumalee. A. (2004). A Genetic Algorithm Based Approach to Optimal Toll Level and Location Problems. Networks and Spatial Economics, 4, 161–179.

Smith, M.J. (1979). The marginal cost pricing of a transportation network. Transportation Research, 13B, 237-242.

Small, K.A. (1992) Urban Transport Economics Harwood, Chur.

Small, K. A. and Gómez-Ibáñez, J. A. (1998). Road Pricing for Congestion Management: The Transition from Theory to Policy." In Road Pricing, Traffic Congestion and the Environment: Issue of Efficiency and Social Feasibility, edited by K. J. Button and E. T. Verhoef. Cheltenham: Edward Elgar, 213–246.

Verhoef, E.T. (2002). Second-best congestion pricing in general networks: heuristic algorithms for finding second-best optimal toll levels and toll points. Transportation Research, 36B, 707-729.

Wardrop, J. (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. Proceeding of the Institute of Civil Engineers, 2, 325-378.

Yang, H. and Bell, M.G. (1998). Models and algorithms for road network design: a review and some new developments. Transport Reviews, 18, 257-278.

Yang, H. and Meng, Q. (2002). A note on highway pricing and capacity choice under a build-operate-transfer scheme. Transportation Research , 36A, 659-663.

Yanga, H.; Xua, W. and Heydecker,B. (2010). Bounding the efficiency of road pricing. Transportation Research, 46E, 90-108.

ANEXOS

Ejemplo Analítico para una Red Simple

Para la red de la Figura 1, consideremos una demanda fija total $f_a + f_b = 100$ y las siguientes funciones de costo para cada arco:

$$c_a(f_a) = 50 + f_a \text{ , } c_b(f_b) = 120 + 5f_b \tag{44}$$

Para estos datos, el equilibrio de mercado (primer principio de Wardrop) es:

$$f_a^* = 95 \text{ , } f_b^* = 5 \text{ , } c_a(f_a^*) = c_b(f_b^*) = 145 \tag{45}$$

El costo total de la red es $c_a(f_a^*) \cdot f_a^* + c_b(f_b^*) \cdot f_b^* = 14.500 \cdot$ Si consideramos una función de utilidad de la forma $U_i = \frac{(g_i)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{(t-c_i)^{1-\theta}}{1-\theta}$, con t = 200 y θ= 0.7, el valor de la función de bienestar social es $U(c_a^*) \cdot f_a^* + U(c_b^*) \cdot f_b^* = 1.109,1 \cdot$

Por otra parte, la asignación a costo total mínimo (segundo principio de Wardrop) es:

$$f_a^* = 89,17 \text{ , } f_b^* = 10,83 \text{ , } c_a(f_a^*) = 139,17 \text{ , } c_b(f_b^*) = 174,17 \tag{46}$$

El costo total de la red es $c_a(f_a^*) \cdot f_a^* + c_b(f_b^*) \cdot f_b^* = 14.295,8$, y el valor de la función de bienestar es $U(c_a^*) \cdot f_a^* + U(c_b^*) \cdot f_b^* = 1.115,1 \cdot$

Por lo tanto, si comparamos el resultado (45) con el resultado (46) vemos que para este último el costo total se reduce en 204,2 unidades mientras que el bienestar social aumenta en 6 unidades. En consecuencia, para este ejemplo tenemos que una asignación a mínimo costo total también aumenta el bienestar social.

Sin embargo, si consideramos ahora que el costo del arco *a* es $c_a(f_a) = 100 + f_a$, el equilibrio de Mercado sería:

$$f_a^* = 86,7 \text{ , } f_b^* = 13,3 \text{ , } c_a(f_a^*) = c_b(f_b^*) = 186,7 \tag{47}$$

El costo total de la red es $c_a(f_a^*) \cdot f_a^* + c_b(f_b^*) \cdot f_b^* = 18.666,7$ y el valor de la función de bienestar social es $U(c_a^*) \cdot f_a^* + U(c_b^*) \cdot f_b^* = 725 \cdot$

Del mismo modo, la asignación a costo mínimo ahora sería:

$$f_a^* = 85 \text{ , } f_b^* = 15 \text{ , } c_a(f_a^*) = 185 \text{ , } c_b(f_b^*) = 195 \tag{48}$$

El costo total de la red es $c_a(f_a^*) \cdot f_a^* + c_b(f_b^*) \cdot f_b^* = 18.650$, y el valor de la función de bienestar social es $U(c_a^*) \cdot f_a^* + U(c_b^*) \cdot f_b^* = 719,5 \cdot$

Por lo tanto, si comparamos el resultado (47) con el resultado (48) vemos que para este último el costo total se reduce en 16,7 unidades, pero ahora el bienestar social se reduce en 5,5 unidades. En consecuencia, para este ejemplo tenemos que una asignación a mínimo costo total reduce el bienestar social.