

# Identificabilidad de modelos de elección discreta con mecanismos de elección heterogéneos

## IDENTIFIABILITY OF DISCRETE CHOICE MODELS WITH HETEROGENEOUS CHOICE MECHANISMS

Felipe González-Valdés, Juan de Dios Ortúzar\*

Pontificia Universidad Católica de Chile.

\* Autor para correspondencia:  
jos@ing.puc.cl

### RESUMEN

Analizamos la identificabilidad de modelos que admiten la posibilidad de que los individuos usen diferentes mecanismos de elección, en forma teórica y empírica. Para esto, derivamos una expresión basada en la matriz de información del modelo, que explica cómo la diferencia de comportamiento de cada mecanismo de elección afecta su identificabilidad. Luego, simulamos una población consistente con las heurísticas modeladas sobre un banco de datos de elecciones reales de modo de transporte. Del experimento analizamos si es posible identificar heurísticas de elección distintas del mecanismo de Maximización de la Utilidad (RUM). Concluimos que el mecanismo de elección más identificable del RUM es el de Eliminación por Aspectos (EBA), mientras que el menos identificable es la Minimización del Remordimiento (RRM); la heurística de elección Satisficing parece un caso intermedio.

Palabras clave: modelos de elección discreta, racionalidad limitada, múltiples heurísticas

### ABSTRACT

*We analyse theoretically and empirically the identifiability of models that accept the possibility that individuals may choose following different choice mechanisms. Based on the model's information matrix, we explain how the difference in observed behaviour enables us to identify the different heuristics. Then, by simulating a population in a real transport mode data bank, we analyse if it is possible to identify several alternative heuristics from the Random Utility Maximisation (RUM) mechanism. We conclude that Elimination By Aspects (EBA) is the most identifiable choice mechanism from RUM; conversely, Random Regret Minimization (RRM) is the least, whereas Satisficing represents an intermediate case.*

*Keywords: Discrete choice models, Bounded rationality, Multiple heuristics*

## 1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de elección discreta son una de las herramientas econométricas frecuentemente usadas en ingeniería de transporte para estudiar la demanda por transporte (Ortúzar y Willumsen, 2011). El enfoque de elección discreta más importante ha sido el de Maximización de la Utilidad - RUM (McFadden, 1981), que ha dado lugar a múltiples modelos prácticos, típicamente asociados a la familia Logit (MNL, HL, Logit Mixto). No obstante, distintos modelos que aplican otras teorías han proliferado en la última década (Chorus, 2010; Leong y Hensher, 2012b).

El núcleo de un modelo de elección discreta es el mecanismo o heurística de elección, que describe una forma plausible en que un individuo escoge una alternativa a partir de un conjunto discreto de opciones. Su correcta especificación es clave para el correcto funcionamiento de dicho modelo en modalidad predictiva (Williams y Ortúzar, 1982). Es por esto que numerosas heurísticas alternativas a RUM se han propuesto a lo largo de los años con el objetivo de caracterizar el comportamiento al momento de elegir; tres ejemplos interesantes son Minimización del Remordimiento - RRM (Chorus et al., 2008; Chorus, 2010), Eliminación por Aspectos - EBA (Tversky, 1972a, 1972b) y Satisficing (Simon, 1955).

En cualquier contexto de elección complejo, es posible que distintas personas de la población sigan heurísticas de elección distintas. Para poder capturar dichas heurísticas, es que se han implementado recientemente modelos que consideran mecanismos de elección heterogéneos (Adamowicz y Swait, 2013; Hess et al., 2012; Leong y Hensher, 2012b). Estos tienen la bondad de poder asignar –estocásticamente– distintos mecanismos de elección a distintos individuos, permitiendo – en principio – la posibilidad de estimar modelos altamente flexibles.

El principal problema de los modelos de elección discreta con heurísticas heterogéneas es que tienden a tener problemas de identificabilidad<sup>1</sup>, para lo cual han requerido un tratamiento especial como normalizaciones o variables latentes (Hess y Stathopoulos, 2013; Leong y Hensher, 2012b). Pese a que los problemas de identificabilidad son frecuentes, no han sido estudiados. Es más, no sólo se desconocen las razones por las cuales existen problemas de identificabilidad, sino que también se desconoce el funcionamiento de los modelos cuando se considera solo parcialmente los múltiples mecanismos que pueden existir.

En este trabajo abordamos la estimación de modelos con múltiples mecanismos de elección desde una mirada teórica y práctica, buscando entender si es posible identificarlos en contextos de modelación de transporte. Comenzamos analizando la matriz Hessiana de la función de verosimilitud de un modelo con múltiples heurísticas de elección y derivamos condiciones para su identificabilidad. Posteriormente experimentamos con un banco de datos simulados sobre elección de modo de transporte; en que individuos ficticios escogen de acuerdo a distintos mecanismos. De este experimento analizamos condiciones que afectan la identificabilidad como el tipo de mecanismos de elección involucrados, la proporción de individuos que elige de acuerdo a cada mecanismo y el grado de correlación entre la elección de un determinado mecanismo y sus parámetros. El análisis finaliza identificando qué heurísticas de elección son más identificables (esto es, diferenciables de RUM) y caracteriza distintos niveles de identificabilidad.

## 2. ANÁLISIS TEÓRICO DE IDENTIFICABILIDAD

En esta parte analizamos como la diferencia de comportamiento entre distintas heurísticas de elección permite su identificación. Logramos demostrar que la diferencia de comportamiento no está dada exclusivamente por la distinta forma funcional, sino que los contextos de elección también deben ser capaces de materializar dicha diferencia en la matriz de probabilidades.

Supongamos que existen dos heurísticas presentes en una muestra determinada,  $A$  y  $B$ , que son usadas por los individuos con probabilidades  $\pi_A$  y  $(1-\pi_A)$  respectivamente. Sea  $P_{hqi}(\theta)$  la probabilidad que el individuo  $q$  escoja la alternativa  $i$  bajo la heurística  $h$  usando un conjunto de parámetros  $\theta$ . Entonces,  $P_{qi}(\theta)$ , la probabilidad de escoger la alternativa  $i$  en el modelo conjunto está dado por la Ecuación 1.

$$P_{qi}(\theta) = \pi_A P_{Aqi}(\theta) + (1-\pi_A) P_{Bqi}(\theta) \quad (1)$$

La función de log-verosimilitud está dada por la Ecuación 2, en la cual  $P_{hq^*}(\theta)$  representa la probabilidad de haber escogido la alternativa efectivamente elegida bajo la heurística  $h$ .

$$l(\theta) = \sum_q \log(\pi_A P_{Aq^*}(\theta) + (1-\pi_A) P_{Bq^*}(\theta)) \quad (2)$$

<sup>1</sup> Un modelo es identificable cuando es posible definir únicamente cuál es el conjunto de parámetros máximo verosímiles. Falta de identificabilidad puede deberse a falta de datos, identificabilidad empírica, o a la infactibilidad de un modelo de ser identificado, identificabilidad teórica.

El conjunto de parámetros máximo verosímiles corresponde al punto en que la Ecuación 2 alcanza su máximo valor. En dicho punto, la matriz de covarianza está dada por la Ecuación 3, en que  $F$  representa la matriz de información de Fisher (Ortúzar y Willumsen, 2011, cap. 3), que es equivalente al negativo de la matriz Hessiana dada por la Ecuación 4.

$$\Sigma = F^{-1} \quad (3)$$

$$F = -E \left( \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_x \partial \theta_y} \right) \quad (4)$$

Para que la matriz de covarianza exista, y por tanto el modelo sea identificable, la matriz de información debe ser no singular. Más aún, para tener una fuerte identificabilidad – o bajas desviaciones estándar– la matriz de información debe tener un determinante grande de forma que la matriz de covarianza exhiba bajos coeficientes de variación.

El elemento de la matriz de información que relaciona ambos mecanismos de elección es el elemento  $\pi_A$ . La matriz de información en la diagonal de dicho elemento está dada por la Ecuación 5.

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{(\partial \pi_A^2)} = - \sum_{\forall q \in Q} \frac{(P_{Aq^*} - P_{Bq^*})^2}{(P_{q^*}^2)} \quad (5)$$

Para que la matriz de información tenga un determinante grande, y por tanto se relacione con bajas desviaciones estándar de los parámetros, es necesario que la Ecuación 5 tome valores elevados. Notar, además, que la máxima verosimilitud se obtiene cuando las probabilidades  $P_{q^*}^2$  son máximas, y por tanto, la Ecuación 5 alcanza un tamaño importante cuando el numerador tiene una magnitud significativa.

La diferencia  $(P_{Aq^*} - P_{Bq^*})$  es un elemento importante en la identificación de las distintas heurísticas de elección. Si sistemáticamente los mecanismos de elección tienen comportamientos similares, lo cual se traduce en que la diferencia de probabilidades es baja, entonces el modelo completo será poco identificable.

A continuación, analizaremos si distintos mecanismos de elección logran materializar una diferencia funcional en la matriz de información, en un contexto de transporte.

### 3. MECANISMOS DE ELECCIÓN

En este paper trabajamos con cuatro mecanismos de elección: Maximización de la Utilidad Aleatoria –RUM– (McFadden, 1973), Eliminación por Aspectos –EBA– (Tversky, 1972a, 1972b), Stochastic Satisficing –SS– (González-Valdés y Ortúzar, 2018) y Minimización del Remordimiento Aleatorio –RRM– (Chorus et al., 2008). Dichos mecanismos se explican a continuación.

#### 3.1 Maximización de la Utilidad Aleatoria (RUM)

El mecanismo de Maximización de la Utilidad Aleatoria o RUM es el mecanismo más popular en modelos de elección discreta, cuyo principal exponente es el modelo logit. Este mecanismo establece que los individuos  $q$  asignan una utilidad  $U_{qi}$  a la alternativa  $i$  en función de sus atributos  $x_{qik}$  (Ecuación 6). El modelador puede especificar una función de utilidad sistemática  $V_{qi}$  para representar la utilidad de los individuos. No obstante, hay una parte de la utilidad que el modelador no puede modelar y se recoge como error aleatorio,  $\epsilon_{qi}$  (Ecuación 7).

$$V_{qi} = \beta_i + \sum_k \beta_{qik} \cdot x_{qik} \quad (6)$$

$$U_{qi} = V_{qi} + \epsilon_{qi} \quad (7)$$

El individuo escoge la alternativa que maximiza su utilidad. Dependiendo de la distribución del error aleatorio, se pueden obtener diferentes modelos. En este paper usamos el modelo Logit Multinomial que asume errores distribuyendo i.i.d. Gumbel. Con esta estructura del error las probabilidades de elección están dadas por la Ecuación 8.

$$P_{qi} = \frac{\exp(V_{qi})}{\sum_{\forall j \in J} \exp(V_{qj})} \quad (8)$$

### 3.2 Eliminación por aspectos (EBA)

Eliminación por aspectos o EBA (Tversky, 1972a, 1972b) es un mecanismo de racionalidad limitada en el cual los individuos interpretan cada alternativa como un conjunto discreto de atributos deseables (e.g. si una alternativa es de bajo costo, rápida, etc.). La heurística sigue un proceso recursivo en el que en cada iteración se escoge un aspecto disponible y se descartan todas las alternativas que no tengan dicho aspecto. Este proceso continua hasta que solo una alternativa esté disponible<sup>2</sup>. Dada esta estructura recursiva, no existe una fórmula general para la probabilidad de escoger una alternativa.

La naturaleza estocástica del modelo radica en que el modelador desconoce la secuencia de inspección de los atributos o el ranking de importancia de los aspectos, por lo que asume una secuencia estocástica. Para estimar la probabilidad de dicha secuencia, el modelador asume que cada aspecto tiene asociado un peso ( $w_j$ ) y la probabilidad de escoger un atributo es proporcional a dicho peso. Matemáticamente, sea  $A$  el conjunto de todos los aspectos disponibles, entonces la probabilidad de escoger el aspecto  $a$  está dado por la Ecuación 9.

$$\Pr(a) = \frac{w_a}{\sum_{\forall j \in A} w_j} \quad (9)$$

El modelo EBA estima los pesos para cada aspecto. No obstante, definir aspectos discretos para atributos continuos no es sencillo y no existe una metodología para ello (Hess et al., 2012). Típicamente se definen umbrales a partir de los cuales un atributo es no aceptable, pero no existe una forma de estimar tanto los umbrales como los pesos. Notar además que los pesos son variables positivas. Para estimar el modelo de manera irrestricta normalmente se estima una transformación de los pesos dado por la Ecuación 10.

$$w_i = \exp(\alpha_i) \quad (10)$$

### 3.3 Stochastic Satisficing (SS)

Satisficing (Simon, 1955) es una heurística en la que los individuos escogen la primera alternativa satisfactoria. De los diversos modelos que aplican esta heurística, utilizamos el Stochastic Satisficing –SS– (González-Valdés y Ortúzar, 2018) que interpreta de forma estocástica la aceptabilidad de las alternativas. Bajo SS, una alternativa es aceptable si todos los atributos que posee son aceptables. Como se expresa en la Ecuación 11.

$$\Pr(A_{jq} = 1) = \prod_k a_{kjq} \quad (11)$$

Un atributo es aceptable si está dentro de un rango aceptable. Dicho rango está definido por un umbral de aceptación. El modelador puede identificar ciertos elementos que afectan la magnitud del umbral ( $f_{kjq}$ ) y otros que son recogidos como efectos aleatorios. SS asume que dichos errores aleatorios distribuyen i.i.d. logística. Luego, la probabilidad de aceptar un atributo está dado por la Ecuación 12.

<sup>2</sup> Ejemplos sencillos de EBA desarrollados matemáticamente pueden ser encontrados en el trabajo de Gilbride y Allenby (2006).

$$\Pr(a_{kij}=1) = \frac{\exp(\lambda_{kij}(x_{kij} - f_{kij}))}{1 + \exp(\lambda_{kij}(x_{kij} - f_{kij}))} \quad (12)$$

En la función de aceptabilidad de la Ecuación 12, el factor de escala representa la sensibilidad del individuo con respecto a cambios en el atributo en  $x_{kij}$ . En este modelo tanto el factor de escala como el umbral son teóricamente identificables.

El modelo SS puede lidiar con atributos que no se compensan entre sí, como se puede apreciar en la Ecuación 11; como también con atributos que pueden ser compensados. Para ello, los atributos que pueden ser compensados se modelan en la misma función de aceptabilidad (Ecuación 12).

### 3.4 Minimización del Remordimiento Aleatorio (RRM)

El mecanismo de Minimización del Remordimiento Aleatorio –RRM– (Chorus et al., 2008) analiza la ventaja relativa de cada alternativa con respecto a las demás. Para ello, el individuo computa el remordimiento entre un par de alternativas como la suma ponderada de los atributos en los cuales es perdedor (Ecuación 13).

$$R_{ij} = \sum_k \text{Max}(0, \beta_{qk}(x_{qjk} - x_{qik})) \quad (13)$$

Luego el remordimiento total de una alternativa es la suma de los remordimientos con respecto a todas las alternativas más un error estocástico (Ecuación 14). Dicho error estocástico captura la fracción del remordimiento que el modelador no puede modelar.

$$R_i = \sum_{\forall j \neq i} R_{ij} + \epsilon_i \quad (14)$$

Finalmente, si dicho error distribuye i.i.d. Gumbel, la probabilidad de escoger la alternativa está dada la Ecuación 15.

$$P_{qi} = \frac{\exp(R_{qi})}{\sum_{\forall j \in j} \exp(R_{qj})} \quad (15)$$

A la formulación ya presentada, existen dos modificaciones. La primera, hace diferenciable la función planteada en la Ecuación 13, mediante la aproximación de la función máximo por una función logaritmo. Dicha aproximación se presenta en la Ecuación 16.

$$\text{Max}(0, x) \approx \text{Log}(1 + \exp(x)) \quad R_{ij} = \sum_k \text{Max}(0, \beta_{qk}(x_{qjk} - x_{qik})) \approx \sum_k \log(1 + \beta_{qk}(x_{qjk} - x_{qik})) \quad (16)$$

La segunda modificación intensifica o suaviza la diferencia de comportamiento entre el mecanismo RRM y el RUM mediante la introducción de un parámetro adicional ( $\mu$ ). El modelo  $\mu$ -RRM (Ecuación 17) permite modelar comportamientos cercanos al RUM si el parámetro alcanza magnitudes elevadas, cercanos al RRM si es cercano a la unidad y comportamientos más extremos que el RRM si alcanza valores bajos.

$$R_{ij} = \sum_k \mu \cdot \log\left(1 + \frac{\beta_{qk}(x_{qjk} - x_{qik})}{\mu}\right) \quad (17)$$

Se utiliza esta última versión del modelo RRM con el objetivo de simular una mayor diferencia entre el RRM y el RUM. Al permitir mayor diferencia de comportamiento, es más plausible identificar el mecanismo RRM del RUM.

#### 4. EXPERIMENTO EMPÍRICO DE IDENTIFICABILIDAD

El objetivo de este estudio es explorar el efecto de distintas dimensiones que pueden afectar el proceso de elección en la identificación de modelos con múltiples mecanismos de elección. Para garantizar la presencia de las distintas heurísticas y tener control sobre los parámetros que las definen, se utiliza una población sintética. En particular se estudia tres dimensiones que afectan el proceso de elección: los tipos de mecanismos presentes, la proporción de uso de cada mecanismo en la muestra y la correlación entre probabilidad usar un mecanismo y sus parámetros. Para cada combinación de dimensiones realizamos diez experimentos buscando la identificabilidad de los mecanismos de elección.

1. *Tipo de mecanismo de elección.* El análisis teórico anterior indica que la diferencia de comportamiento es clave para identificar el modelo. Para este análisis, probamos tres heurísticas de elección interesantes versus el mecanismo de Maximización de la Utilidad RUM, las cuales son EBA, SS y RRM.
2. *Proporción de cada heurística en la muestra.* Se analizó dos opciones: 70% para el mecanismo RUM y 30% para el mecanismo restante, y viceversa.
3. *Correlación entre el mecanismo de elección y la probabilidad de elección de la heurística.* El objetivo de esta dimensión fue analizar si la existencia de esta clase de correlación dificulta la identificación del modelo. Esta correlación se puede deber a características sociodemográficas de los individuos que correlacionan tanto con la función de elección de heurística, como con el mecanismo de elección en sí.

Se optó por considerar tres alternativas por conjunto de elección ya que ese es el número mínimo que permite identificar ciertos mecanismos (RUM y RRM por ejemplo) y, al mismo tiempo, permite reducir el tiempo de estimación de heurísticas complejas (como EBA). También se optó por utilizar un tamaño muestral grande, diez mil observaciones, para disponer de un escenario optimista en cuanto a identificabilidad. Éste es un número elevado en comparación con estudios anteriores relacionados con modelación permitiendo mecanismos heterogéneos (e.g. Adamowicz y Swait, 2013; Araña et al., 2008; Balbontin et al., 2017; Hess et al., 2012; Hess y Stathopoulos, 2013; Leong y Hensher, 2012b; McNair et al., 2012).

En los estudios anteriores relacionados con este tema se ha usado mayoritariamente datos de preferencias declaradas. Esto tiene la ventaja de poder diseñar el estudio para capturar distintos comportamientos; no obstante, pese a su uso, no se ha logrado identificar modelaciones de mediana complejidad sin uso de datos externos o normalizaciones (Hess y Stathopoulos, 2013; Leong y Hensher, 2012b). Más aún, aún si se pudiesen capturar distintas heurísticas de elección, su captura no asegura que también se puedan modelar dichos comportamientos en un contexto real de transporte. Por este motivo acá hacemos uso de una base de datos realista creada a partir de un experimento de preferencias reveladas de modo de transporte.

##### 4.1 Construcción de la base de datos

Los conjuntos de elección son obtenidos de un banco de datos correspondiente a una encuesta de modo de transporte para viajes al trabajo en Santiago de Chile. Estos datos tienen la particularidad de haber sido bastante estudiados (Gaudry et al., 1989; Guevara, 2016; Guevara et al., 2016; Jara-Díaz y Ortúzar, 1989; Ortúzar y Fernández, 1985).

El banco de datos contiene 1.274 elecciones reales y sus respectivos conjuntos de elección (i.e. alternativas disponibles con sus atributos). Los conjuntos de elección del banco de datos tienen entre dos y nueve alternativas caracterizadas por costo, tiempo de viaje, tiempo de caminata y tiempo de espera.

Una base de datos para el experimento sintético se crea a partir de individuos ficticios eligiendo sobre conjuntos de elección. Para crear los conjuntos de elección del experimento sintético, se extrajeron muestras aleatoriamente del banco de datos original. Dicha extracción se realizó con reemplazo, es decir un mismo conjunto de elección puede ser seleccionado en más de una ocasión y por tanto enfrentado por más de un individuo. Una vez seleccionado un conjunto de elección, se corrige para que tenga solo tres alternativas. Para lograrlo, de cada conjunto con más de tres alternativas, se eliminó alternativas de forma aleatoria hasta alcanzar tres alternativas. Finalmente, el muestreo se repitió hasta tener diez mil observaciones.

Como se explicó anteriormente, el meta-experimento considera tres dimensiones. Para cada combinación de las dimensiones se realizó diez experimentos. Por lo tanto, para cada una de los diseños experimentales se generaron diez bases de datos distintas sobre las cuales simular el comportamiento de la población sintética.

## 4.2 Población sintética

Para cada individuo simulado, se creó un atributo binario que representa alguna característica sociodemográfica abstracta llamada sencillamente “característica”. Cada miembro de la población está “diseñado” para usar una de dos heurísticas. De esta forma, probamos las tres heurísticas (EBA, SS y RRM) versus la popular RUM de forma independiente. En cada caso, la probabilidad de escoger RUM estaba dada por la función logística inversa (Ecuación 18). Para la Ecuación 18 se usan dos conjuntos de parámetros para poder generar las dos variedades de proporciones (70%-30% y viceversa). Dichos parámetros se presentan en la Tabla 1.

$$\pi_{RUM} = \frac{\exp(\theta_0 + \theta_1 * \text{característica})}{1 + \exp(\theta_0 + \theta_1 * \text{característica})} \quad (18)$$

Tabla 1  
*Parámetros de la función de elección de heurística*

Parametro	Valor
$\theta_0$	0
$\theta_1$	+/- 1,39

Los parámetros específicos de cada heurística se encuentran en la Tabla 2. Los parámetros fueron seleccionados de tal forma que los mecanismos de elección exhiban comportamientos distintos al RUM y por tanto maximizar la probabilidad de identificarlos. Por ejemplo, notar en la Tabla 2 la presencia de bajos valores de constantes modales; ello con el objetivo de que la elección sea hecha a partir de los atributos. Pruebas preliminares dan cuenta de que cuando la constante modal es muy alta, los mecanismos no pueden ser identificados; posiblemente porque cada uno de los modelos es capaz de recomponer las proporciones de mercado.

Tabla 2  
*Parámetros de simulación*

Parámetro	EBA (umbral)	RRM	SS	RUM
Costo 1	1,39 (40 CLP)	3	-0,10	-0,5
Costo 2	1,39 (60 CLP)	-	-	0,2
Umbral de costo	-	-	45 CLP	-
Tiempo de viaje	1,39 (15 min)	10	-0,20	-5,0
Tiempo de espera	2,08 (3 min)	50	-0,35	-20,0
Tiempo de caminata	2,30 (5 min)	20	-0,80	-6,5
Umbral de tiempo	-	-	36 min	-
Mu	-	0,2	-	-
Asc1	0,41	0,5	1,5	0,5
Asc2	0 (fixed)	0 (fixed)	1 (fixed)	0 (fixed)
Asc3	0,10	0,1	1,1	0,1
Asc4	0,59	0,8	1,8	0,8
Asc5	0,53	0,7	1,7	0,7
Asc6	0,47	0,6	1,6	0,6
Asc7	0,18	0,2	1,2	0,2
Asc8	0,26	0,3	1,3	0,3
Asc9	0,34	0,4	1,4	0,4

Para todos los modelos se modeló el costo, tiempos y constantes modales. Adicionalmente, en los experimentos que consideraban una correlación positiva, se introdujo un parámetro adicional que cambia la sensibilidad del costo en el mecanismo RUM. Las personas sin la característica tienen un parámetro del costo de -0.5, mientras que las personas con la característica tienen un parámetro del costo de -0.2.

Para el modelo EBA se consideró que los individuos separaron cada uno de los tiempos (en vehículo, caminata y espera) como aceptables o no aceptables mediante un umbral único expuesto en la Tabla 2. Para el costo, en cambio, se simuló que los individuos separaban el costo en tres niveles (mediante dos umbrales). De los tres niveles de precios, los dos menores son deseables; no obstante, el menor es más deseable que el intermedio.

En el caso del modelo SS, los individuos simulados compensaban los tiempos de viaje, espera y caminata, por lo tanto, dichos atributos fueron modelados en la misma función de aceptabilidad. Mientras que, para el caso del costo, éste no se compensa con los tiempos de viaje, por lo que se modela en una función de aceptabilidad distinta.

### 4.3 Estimación

Debido a que los modelos con heurísticas heterogéneas de elección pueden tener problemas de identificabilidad, buscamos trabajar con la técnica más robusta de estimación posible. Consideramos las alternativas de maximización de la verosimilitud y estimación bayesiana.

La Maximización de la verosimilitud tiene dos inconvenientes en este caso particular. El primero es que el estimador de la matriz de covarianza es un estimador asintótico y el segundo es que en este tipo de modelos puede ser difícil encontrar el punto máximo verosímil. Si bien, estos problemas pueden ser superados, por ejemplo, partiendo de distintos puntos iniciales, no es sencillo descartarlos como posibles razones en el caso que la matriz de covarianza sea no identificable.

La estimación bayesiana no tiene los problemas antes descritos<sup>3</sup> y es posible muestrear la distribución de probabilidades de los parámetros aunque éstos sean poco identificables. Por lo tanto, se utilizó la estimación bayesiana para este análisis.

Para realizar la estimación bayesiana utilizamos el paquete estadístico JAGS (Plummer, 2016) diseñado para el software R (R Core Team, 2015). Para poder extraer muestras de los parámetros de la cadena de Markov en estado estacionario, se inició eliminando las primeras diez mil iteraciones, para luego muestrear las siguientes veinte mil. Finalmente, con respecto a los valores *a priori*, usamos distribuciones uniformes de elevada varianza con el objetivo de no sesgar los estimadores.

## 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Se estimó un total de 120 modelos, de los cuales 40 corresponden a cada heurística contra RUM. De estos 40, diez corresponden a cada combinación de dimensiones. Para analizar los resultados de estos modelos de forma conjunta, primero analizamos la diferencia de probabilidad entre los mecanismos analizados y RUM. Luego analizamos a qué nivel se condice dicho análisis con la identificabilidad de modelos. Finalmente se analiza tanto el sesgo en la estimación de los parámetros.

### 5.1 Diferencias de probabilidad

Como se señaló en el análisis teórico de identificabilidad, el elemento clave para lograr dicha identificabilidad de mecanismos es la diferencia de probabilidad entre ellos. Para todas las alternativas de la muestra calculamos la diferencia de probabilidad entre el mecanismo RUM y la contraparte. El valor absoluto de dicha probabilidad se presenta en los gráficos de la Figura 1.

Es posible apreciar que la diferencia entre RUM y RRM es inferior a la diferencia respectiva con EBA y SS, mientras que estos dos últimos tienen diferencias similares con respecto al RUM. Si bien, este análisis es preliminar y no garantiza identificabilidad –puesto que la matriz de información debe ser no nula en todas las direcciones y este análisis muestra una dimensión–, entrega una aproximación útil para entender los fenómenos que posteriormente se interpretan.

<sup>3</sup> Puede tener otros inconvenientes, pero que no representan un problema real en este escenario.



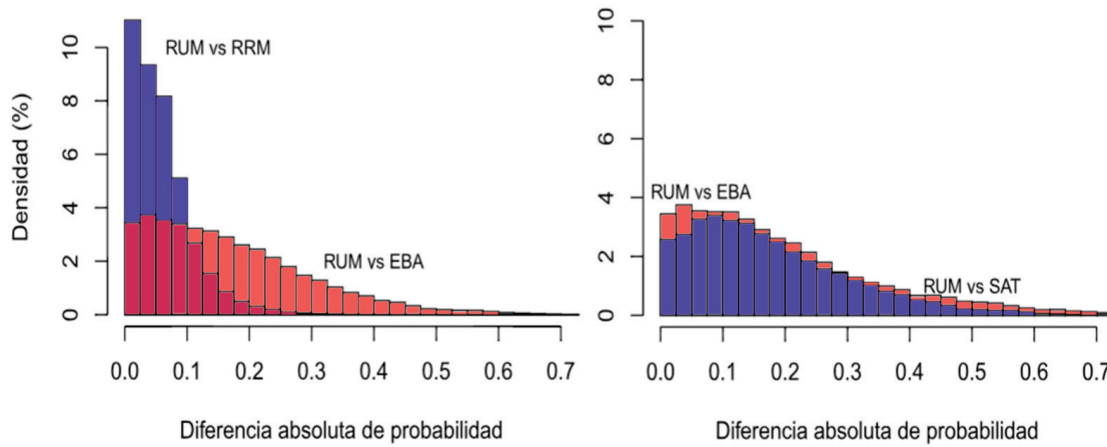


Figura 1. Diferencia de probabilidad de RUM contra RRM, EBA y SS

### 5.2 Resultados de identificabilidad

La diferencia de probabilidades expuesta en la Figura 1 se relaciona con el grado de identificabilidad. Si bien la identificabilidad estricta se define como la existencia del inverso de la matriz de información (Rothenberg, 1971), la identificabilidad estricta no garantiza que el modelo sea útil puesto que la varianza puede ser extremadamente alta. Por lo tanto, definiremos tres categorías de identificabilidad para caracterizar el modelo:

- Identificabilidad fuerte: todos los parámetros del modelo son estimados con una aceptable varianza. Se identifica claramente dos segmentos de heurística.
- Identificabilidad débil: una proporción pequeña de los parámetros del modelo son estimados con desviaciones estándar extremas. Si bien el modelo no debiese ser usado, los resultados identifican claramente dos segmentos de heurísticas.
- Identificabilidad nula: la matriz de información es no invertible y por tanto las desviaciones estándar de los estimadores es extrema. Se logra identificar máximo una heurística y la otra es inexistente.

La Tabla 3 presenta la identificabilidad entre EBA y RUM. Como es esperable, en los contextos en que domina una heurística, dicha heurística es más fácil de identificar. El ingreso de correlación –moderada– dificulta la identificación del mecanismo. Más aún, pese a que la correlación es entre la heurística RUM y la función de elección de heurística, en el caso que domina RUM, la principal pérdida de identificabilidad se traduce a través del EBA. Si bien la identificabilidad no es total, EBA es altamente identificable de RUM en este contexto.

Tabla 3  
Identificabilidad EBA vs RUM

Identificabilidad	Correlación Nula		Correlación positiva RUM	
	Domina RUM	Domina EBA	Domina RUM	Domina EBA
Fuerte ambos	9/10	10/10	7/10	9/10
Fuerte EBA Débil RUM				
Débil EBA Fuerte RUM	1/10		3/10	

La Tabla 4 presenta la identificabilidad entre RRM y RUM. En ella se ve el resultado de lo expuesto en la Figura 1, la diferencia de comportamiento entre ambos mecanismos es menor y se refleja en que la identificabilidad entre ambas heurísticas es nula. A diferencia del modelo que contrasta EBA contra RUM, el modelo RRM jamás logra identificarse del modelo RUM. Adicionalmente, el modelo RUM normalmente domina al modelo RRM en términos de identificabilidad incluso cuando en la muestra domina el modelo RRM. La identificabilidad del modelo RRM no crece cuando la complejidad de identificabilidad del modelo RUM aumenta.

Tabla 4  
*Identificabilidad RRM vs RUM*

Identificabilidad	Correlación Nula		Correlación positiva RUM	
	Domina RUM	Domina RRM	Domina RUM	Domina RRM
Fuerte RRM Nula RUM	2/10	4/10	1/10	6/10
Nula RRM Débil RUM	8/10	3/10	9/10	3/10
Débil RRM Nula RUM		3/10		1/10

Finalmente, la identificabilidad del modelo SS se expresa en la Tabla 5. El modelo presenta un caso intermedio entre el EBA y el RUM, con más similitud con el primero. El modelo es altamente identificable en numerosos casos y, al igual que el modelo EBA, su identificabilidad decrece cuando al modelo se le incorpora correlación. Notar que la Figura 1 el modelo SS presenta mayores diferencias de comportamiento con respecto al RUM que el modelo EBA, no obstante, el modelo SS fue identificable en menor número de ocasiones. Lo que confirma que la diferencia absoluta entre mecanismos es un buen diagnóstico, pero no asegura identificabilidad del modelo.

Tabla 5  
*Identificabilidad Satisficing vs RUM*

Identificabilidad	Correlación Nula		Correlación positiva RUM	
	Domina RUM	Domina SS	Domina RUM	Domina SS
Fuerte ambos		10/10		9/10
Débil SS Fuerte RUM	9/10		9/10	1/10
Nulo SS Fuerte RUM			1/10	
Débil ambos	1/10			

### 5.3 Análisis de sesgo de parámetros

El último objetivo es analizar el sesgo en los parámetros que se produce debido a la escasa identificabilidad de los modelos. Dado que la población es sintética, conocemos los parámetros reales, entonces es posible analizar el sesgo en estos modelos. Optamos por analizar sólo los casos en que se identificó de forma fuerte algún mecanismo<sup>4</sup>. Adicionalmente, debido a la numerosa cantidad de modelos a analizar (12 modelos con dos heurísticas por modelo), seleccionamos seis modelos para realizar el análisis:

<sup>4</sup> Un modelo con un nivel de identificabilidad débil, en la práctica, es descartado por no identificable, y por tanto nosotros también lo descartamos como modelo válido. No obstante, realizamos la categorización adicional con el fin de mostrar matices de la no identificabilidad.

EBA-RUM: i) correlación nula y domina EBA; ii) correlación positiva y domina RUM.

RRM-RUM: i) correlación nula y domina RRM; ii) correlación positiva y domina RUM.

SS-RUM: i) correlación nula y domina SS; ii) correlación positiva y domina RUM.

Se analizó los parámetros y el estadístico t con respecto a sus valores objetivo para los seis modelos analizados. Para construirlos, obtuvimos la media de cada parámetro de los modelos con algún mecanismo estimado con elevada identificabilidad y la media de su estadístico t con respecto al valor objetivo.

Se constató que los dos modelos EBA-RUM recuperaban los parámetros de forma adecuada, lo cual no es sorprendente, dado el análisis de identificabilidad ya efectuado. En el primer caso, ningún estadístico t promedio superó el valor de 0.80. En efecto, el modelo es altamente identificable. Cuando se introduce mayor nivel de correlación en una de las heurísticas, ambas heurísticas sufren pérdidas de identificabilidad. No obstante, en este modelo no implica problemas mayores (i.e. no implica identificabilidad limitada).

Los modelos RRM-RUM mostraron un desempeño contrario al modelo EBA-RUM. Pese a que todos estos modelos analizados tienen una identificabilidad parcial, es decir, uno de las heurísticas se identificó fuertemente mientras que la otra no, esa identificabilidad no es acompañada de insesgamiento. Entonces, pese a que la matriz de información del modelo se comporta de manera adecuada en una sub-matriz de ésta, el modelo es altamente sesgado.

En la Tabla 6 se presentan los resultados del modelo SS-RUM que exhibe sesgos intermedios entre los casos EBA y RRM. Este modelo es fuertemente afectado por cambios en proporciones y por aumento en la correlación. Luego, es posible concluir que pese a que la identificabilidad es fuerte (i.e. la matriz de información tiene inversa formando desviaciones pequeñas), la identificabilidad no es robusta pues no se mantiene a lo largo de distintos diseños experimentales.

Tabla 6

*Parámetros y test-t (objetivo) de los modelos SS-RUM analizados*

Parámetro	SS - RUM - i		SS - RUM - ii	
	SS	RUM	SS	RUM
Costo 1	-9,59 (-0,71)	-0,49 (-0,05)	-	-0,66 (-1,35)
Costo 2	-	-	-	0,35 (1,33)
Umbral de costo	0,42 (1,16)	-	-	-
Tiempo de viaje	-0,20(-0,37)	-5,41 (-0,47)	-	-4,83 (0,39)
Tiempo de espera	0,31 (-0,28)	-23,37 (-0,66)	-	-18,69 (0,96)
Tiempo de caminata	-0,79 (0,44)	-6,17 (0,32)	-	-7,10 (-1,61)
Umbral de tiempo	0,58 (0,99)	-	-	-
Asc1	-0,52 (0,44)	0,51 (0,06)	-	0,44 (-0,60)
Asc2	-1 (fixed)	0 (fixed)	-	0 (fixed)
Asc3	-0,63 (-1,03)	0,21 (0,51)	-	0,04 (-0,58)
Asc4	-0,74 (0,11)	0,90 (0,21)	-	0,69 (-0,90)
Asc5	-0,67 (-0,53)	0,85 (0,73)	-	0,64 (-0,64)
Asc6	-0,45 (-0,94)	0,70 (0,45)	-	0,56 (-0,44)
Asc7	-0,88 (-0,11)	0,39 (0,63)	-	0,26 (0,72)
Asc8	-0,62 (-0,88)	0,51 (0,72)	-	0,22 (-0,71)
Asc9	-0,68 (-0,58)	0,70 (1,09)	-	0,33 (-0,70)

Finalmente, notar la robustez en la identificación de la heurística RUM. Ésta generalmente es identificada, incluso, en casos donde la contraparte se encuentra en una proporción dominante. El mecanismo RUM muestra mayor compatibilidad con la heurística EBA, compatibilidad intermedia con SS y dudosa compatibilidad con RRM. Notar que, ello no indica que en la población no puedan coexistir dichas heurísticas, es más, no existe impedimento alguno; los resultados indican que no es posible detectar las heurísticas RUM y RRM de forma simultánea –al menos en el contexto realista de transporte que estudiamos.

## 6. CONCLUSIONES

Los problemas de identificabilidad de modelos con múltiples heurísticas y el escaso desarrollo metodológico en el estudio de dichos problemas nos llevaron a estudiar estos modelos de forma teórica y práctica. Más aún, la ausencia de estudios de simulación en modelos con múltiples heurísticas, nos permiten extraer las primeras conclusiones respecto a la capacidad de estos modelos de recuperar el comportamiento subyacente.

Para trabajar el aspecto teórico, estudiamos la matriz de información del modelo de heurísticas heterogéneas. Al focalizarnos en el componente de la diagonal que corresponde a la función de elección de heurística, identificamos la importancia de la diferencia de comportamiento entre los mecanismos para su correcta identificabilidad. Ello, junto con gráficos de diferencia de probabilidad entre heurísticas, permiten generar una hipótesis acerca de la identificabilidad del modelo.

El análisis práctico consideró el mecanismo de maximización de la utilidad enfrentado a tres heurísticas complementarias: minimización del remordimiento, eliminación por aspectos y *stochastic Satisficing*. De este análisis se extrae que el mecanismo de eliminación por aspectos es el más compatible con el RUM en términos de identificabilidad, *stochastic Satisficing* es medianamente compatible, mientras que la minimización del remordimiento es incompatible en este escenario. Dicha identificabilidad se dificulta aún más crece la estructura de correlación entre las funciones de elección de heurística y el mecanismo en sí. De forma adicional, reafirmamos la hipótesis planteada por los gráficos de probabilidad, pero se confirma que ellos son sólo indicativos.

Todos los resultados presentan fuertes tendencias confirmando el análisis teórico. Sin embargo, debido a que solo se probó un contexto de elección y solo dos conjuntos de parámetros, no podemos generalizar las relaciones encontradas entre las distintas heurísticas. No obstante, como primer estudio de simulación de modelos con múltiples heurísticas, siembra un precedente importante en el uso de estos modelos.

Finalmente, es necesaria mayor investigación que permita identificar si los hallazgos de esta investigación son estables en distintos contextos o si el comportamiento en término de identificabilidad es altamente variable. Más aun, es importante recalcar que este análisis incluyó solo dos heurísticas simultáneas. Si bien, la metodología aplica a más heurísticas, la identificabilidad de más heurísticas se espera que sea limitada. Si bien, esta investigación da cuenta de las dificultades de aplicar este tipo de modelos, el impacto de la opción de ignorar la diversidad de heurísticas no ha sido cuantificado y es parte de futuras líneas de investigación.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al profesor Benjamin Heydecker, que proporcionó ayuda a lo largo de esta investigación en la discusión de modelos y resultados. Agradecemos también a tres revisores anónimos que aportaron comentarios útiles en torno a la redacción y contenido del paper. También agradecemos a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT: 21151280) por haber apoyado esta investigación. También agradecemos al Instituto Milenio de Sistemas Complejos de Ingeniería (ICM: P05-004F; FONDECYT: FB8016), al Centro de Excelencia BRT+ financiado por Volvo Research and Educational Foundations y finalmente al Centro de Desarrollo Urbano Sustentable, CEDEUS (Conicyt/Fondap/15110020)

## REFERENCIAS

- Adamowicz, W.L. y Swait, J.D. (2013). Are food choices really habitual? Integrating habits, variety-seeking, and compensatory choice in a utility-maximizing framework. *American Journal of Agricultural Economics*, 95, 17-41 .
- Araña, J.E., León, C.J. y Hanemann, M.W. (2008). Emotions and decision rules in discrete choice experiments for valuing health care programmes for the elderly. *Journal of Health Economics*, 27, 753-769.
- Balbontin, C., Hensher, D.A. y Collins, A.T. (2017). Integrating attribute non-attendance and value learning with risk attitudes and perceptual conditioning. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 97, 172-191.
- Chorus, C.G. (2010). A new model of random regret minimization. *European Journal of Transport and Infrastructure Research*. 10, 2010.
- Chorus, C.G., Arentze, T.A. y Timmermans, H.J.P. (2008). A random regret-minimization model of travel choice. *Transportation Research Part B: Methodological*, 42, 1-18
- Gaudry, M.J.I., Jara-Díaz, S.R. y Ortúzar, J. de D. (1989). Value of time sensitivity to model specification. *Transportation Research Part B: Methodological*, 23, 151-158.
- Gilbride, T.J. y Allenby, G.M. (2006). Estimating heterogeneous EBA and economic screening rule choice models. *Marketing Science*, 25, 494-509.
- González-Valdés, F. y Ortúzar, J. de D. (2018). The stochastic satisficing model: a bounded rationality discrete choice model. *Journal of Choice Modelling*. 27, 74-87: 10.1016/j.joem.2017.11.002
- Guevara, C.A. (2016). Mode-valued differences of in-vehicle travel time savings. *Transportation*, 44, 977-997.
- Guevara, C.A., Chorus, C.G. y Ben-Akiva, M.E. (2016). Sampling of alternatives in random regret minimization models. *Transportation Science*, 50, 306-321.
- Hess, S. y Stathopoulos, A. (2013). A mixed random utility - random regret model linking the choice of decision rule to latent character traits. *Journal of Choice Modelling*, 9, 27-38
- Hess, S., Stathopoulos, A. y Daly, A. (2012). Allowing for heterogeneous decision rules in discrete choice models: An approach and four case studies. *Transportation*, 39, 565-591.
- Jara-Díaz, S.R. y Ortúzar, J. de D. (1989). Introducing the expenditure rate in the estimation of mode choice models. *Journal of Transport Economics and Policy*, 23, 293-308.
- Leong, W. y Hensher, D.A. (2012a). Is route choice a matter of regret minimisation or relative advantage maximisation. In 13th International Conference on Travel Behavior Research, Canada, July 15-19 (CD-ROM).
- Leong, W. y Hensher, D.A. (2012b). Embedding multiple heuristics into choice models: An exploratory analysis. *Journal of Choice Modelling*, 5, 131-144
- McFadden, D. (1981). Econometric models of probabilistic choice. En: Manski, C.F., y McFadden, D. (Eds.). *Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications*, Mit Press. Cambridge, MA. 198-272.
- McFadden, D. (1973). Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. En: Zarembka, P. (Ed.), *Frontiers of Econometrics*. Academic Press, New York. 105-142.
- McNair, B.J., Hensher, D.A. y Bennett, J. (2012). Modelling heterogeneity in response behaviour towards a sequence of discrete choice questions: A probabilistic decision process model. *Environmental and Resource Economics*, 51, 599-616..

- Ortúzar, J. de D. y Fernández, J.E. (1985). On the stability of discrete choice models in different environments. *Transportation Planning and Technology*, 10, 209-218.
- Ortúzar, J. de D. y Willumsen, L.G. (2011). *Modelling Transport*. John Wiley & Sons. Chichester.
- Plummer, M. (2016). Rjags: Bayesian Graphical Models using MCMC. R package version 4-6.
- R Core Team (2015). R: A language and environment for statistical computing.
- Rothenberg, T. (1971). Identification in parametric models. *Econometrica*, 39, 577-591.
- Simon, H.A., (1955). A behavioral model of rational choice. *The Quarterly Journal of Economics*, 69, 99-118.
- Tversky, A., (1972a). Choice by elimination. *Journal of Mathematical Psychology*, 9, 341-367.
- Tversky, A., (1972b.) Elimination by aspects: a theory of choice. *Psychological Review*, 79, 281.
- Williams, H.C.W.L. y Ortúzar, J. de D. (1982). Behavioural theories of dispersion and the mis-specification of travel demand models. *Transportation Research Part B: Methodological*, 16, 167-219.